ECOLE NATIONALE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d' ADMISSION 1979

EPREUVES ECRITES d' ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 Heures)

L'USAGE DES TABLES NUMERIQUES, DES REGLES A CALCUL et des CALCULATRICES ELECTRONIQUES PORTATIVES, NON IMPRIMANTES, A ALIMENTATION AUTONOME, ET SANS DOCUMENT d'ACCOMPAGNEMENT EST AUTORISE.

- *Chaque candidat doit traiter les deux problèmes de l'épreuve. Ces deux problèmes sont indépendants.*
- *Chaque candidat indiquera sur chaque copie le numéro de celle-ci suivi du nombre total de copies rendues (Exemple : copie 1/3).*

PREMIER PROBLEME

On considère le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On se propose d'étudier la famille des courbes (C_m) de ce plan, définies par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \cos^3 t + m \sin t \\ y = \sin^3 t + m \cos t \end{cases}$$

où m est un nombre réel.

On représentera toutes les courbes intervenant dans ce problème sur le même graphique en prenant 5 cm pour unité.

1°/ Montrer que toute courbe (C_m) admet un centre et deux axes de symétrie.

Montrer que pour tout nombre réel m, les courbes (C_m) et (C_{-m}) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2°/ Pour quelles valeurs de m les courbes (C_m) admettent-elles des points stationnaires ?

Trouver les équations paramétriques de l'ensemble de ces points stationnaires ; représenter graphiquement cet ensemble.

Montrer que si $|m|$ est strictement inférieur à $\frac{3}{2}$, ces points stationnaires sont des points de rebroussement.

3°/ Pour quelles valeurs de m les courbes (C_m) passent-elles par O ?

Construire la courbe $(C_{\frac{1}{2}})$.

4°/ Ecrire l'équation de la tangente T à une courbe (C_m) au point M(t) de cette courbe correspondant à la valeur t du paramètre. Soit H(t) la projection orthogonale de O sur T.

Trouver les équations paramétriques de l'ensemble (P_m) décrit par H(t) quand M(t) décrit (C_m).

Trouver ensuite l'équation en coordonnées polaires de (P_m) ; comment se déduisent géométriquement les unes des autres les diverses courbes (P_m) ?

Tracer $(P_{\frac{1}{2}})$.

5°/ Tracer les courbes (C_0), (C_1) et $(C_{\frac{1}{2}})$.

6°/ Soit Δ la droite issue de O, d'angle polaire t par rapport à $\vec{i}$. Elle coupe en N(t) la tangente T.

Trouver les équations paramétriques de l'ensemble décrit par N(t), puis son équation en coordonnées polaires.

Construire cet ensemble pour $m = \frac{1}{2}$.

.../...

DEUXIEME PROBLEME

1°/ On considère l'équation

(1) : $x^n - 1 = 0$, où n est un entier strictement positif.

Quels sont les modules et les arguments des racines de l'équation (1) ?

2°/ On désigne par λ_k le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2k\pi}{n}$,

où n et k sont deux entiers premiers entre eux. Soit q un entier relatif.

Calculer la somme : $\sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_k)^{qj}$

On distinguera deux cas selon que q est divisible ou non par n.

3°/ Soit λ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{n}$.

Soient A et B les matrices carrées d'ordre n, d'éléments génériques respectifs a_r^s et b_r^s , où r désigne l'indice de ligne et s l'indice de colonne, tels que :

$$a_r^s = \lambda^{(r-1)(s-1)} \quad \text{et} \quad b_r^s = \lambda^{-(r-1)(s-1)}$$

Calculer A^2, B^2, AB, BA, et leurs déterminants.

4°/ a) Soient $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}$ n nombres complexes. Soit Δ le déterminant d'ordre n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_0)^0 & (a_1)^0 & \ldots\ldots & (a_{n-1})^0 \\ (a_0)^1 & (a_1)^1 & \ldots\ldots & (a_{n-1})^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_0)^{n-1} & (a_1)^{n-1} & \ldots\ldots & (a_{n-1})^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (a_i - a_j)$

où $\prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (a_i - a_j) = (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)\ldots\ldots\ldots\ldots(a_{n-1} - a_0)$

$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots\ldots\ldots\ldots(a_{n-1} - a_1)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(a_{n-2} - a_{n-3})(a_{n-1} - a_{n-3})$

$(a_{n-1} - a_{n-2})$

b) En considérant le déterminant de A, calculer le produit des carrés des différences deux à deux des racines de l'équation (1). On précisera le signe de ce produit selon la congruence de n modulo 4.

5°/ a) On désigne par M la matrice carrée d'ordre n :

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_0 \\ a_2 & a_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

où $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ sont n nombres complexes et où les éléments de chaque ligne se déduisent des éléments de la ligne précédente par une permutation circulaire.

Calculer les produits matriciels :

AM, MA, BM, MB, AMA et BMB

(On pourra poser $\sum_j = a_0 + \lambda^j a_1 + \lambda^{2j} a_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda^{(n-1)j} a_{n-1}$ où j est un entier compris entre 0 et n-1).

b) Montrer que le déterminant de M, considéré comme polynôme des n variables $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$, est égal à un produit de n polynômes homogènes du premier degré. Expliciter cette factorisation dans les cas n = 2, n = 3 et n = 4.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail